H93. Die Dimension des komplexen Vektorraumes der Polynome vom Rang ≤ 4 ist, wie aus der Vorlesung und den Übungen bekannt $n = 5$.

Da eine sehr ähnliche Aufgabe schon in der Großen Übung und in der Vorlesung gerechnet wurde,überlegt man sich leicht eine spezielle Lösung:

$$p_0(x) = 2 - x + i + i(x-2) + \frac{4i}{2}(x-2)^2$$

Die drei Linearformen

$$p(x) \mapsto p(2) \qquad p(x) \mapsto p'(2) \qquad p(x) \mapsto p''(2)$$

sind linear unabhängig, daher ist der Rang des System $r = 3$ und wir müssen noch $n - r = 5 - 3 = 2$ linear unabhängige Lösungen des homogenen GLS finden. Wir finden also:

$$p_1(x) = (x-2)^3$$

und

$$p_2(x) = (x-2)^4$$

Somit sind alle Lösungen wie folgt beschrieben::

$$p(x) = 2 - x + i + i(x-2) + \frac{4i}{2}(x-2)^2 + a(x-2)^3 + b(x-2)^4$$

mit $\quad a, b \in \mathbb{C}$.

H94. Durch elementare Umformung der Basis des $\mathbb{R}^{10}$ aus **H**75. erhalte ich die Standardbasis $E_1, \ldots E_{10}$. Diese Umformungen auf der Basis $E_1, \ldots E_{10}$ angewendet, liefern folgende Matrix:

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgende duale Basis:

$$\begin{aligned}
B_1 &= (1, 0, \ldots, 0) \\
B_2 &= (1, 1, 0, \ldots, 0) \\
&\vdots \\
B_8 &= (1, \ldots, 0, 0) \\
B_9 &= (\frac{1}{2}, \ldots, -\frac{1}{2}) \\
B_{10} &= (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})
\end{aligned}$$

H95. Man überzeugt sich leicht davon, daß das zugehörige homogene GLS vom Rang 3 ist, da die Gleichungen linear unabhängig sind. Damit ist das GLS universell und eindeutig lösbar. Es folgt:

$$\begin{aligned}
2x + 3y - 4z &= 5\\
-2x + 0y + z &= 7\\
3x + 2y + 2z &= 3\\
&\Downarrow\\
3y - 3z &= 12\\
-2x + 0y + z &= 7\\
4y + 7z &= 27\\
&\Downarrow\\
12y - 12z &= 48\\
-2x + 0y + z &= 7\\
33z &= 33\\
&\Downarrow\\
x &= -3\\
y &= 5\\
z &= 1
\end{aligned}$$

Die einzige Lösung lautet somit: $X = (-3, 5, 1)$.

H96. Die Wirkung der Matrix M_3 auf die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Man sieht also, daß M_3 die Vektoren der Standardbasis um den Faktor 2 streckt.

Nun sehen wir uns die Wirkung von M_4 auf die Standardbasis an:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Wirkung von M_4 ist also eine Spiegelung an der Qudrantenhalbierenden des 2. und 4. Quadranten.

H97. Die lineare Abbildung lässt sich wie folgt darstellen:

$$\phi(X) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_3 - x_2 + 7x_3 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Das Bild von $X = x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3$ berechnet sich also zu:

$$\phi(X) = (3x_3 - x_2 + 7x_3)B_1 + (2x_1 - x_2 + 4x_3)B_2 + (x_1 - x_2 + x_3)B_3$$

Der Kern der Abbildung berechnet sich mit folgendem GLS:

$$\begin{aligned}
3x_1 - 1x_2 + 7x_3 &= 0 \\
2x_1 - 1x_2 + 4x_3 &= 0 \\
1x_1 - 1x_2 + 1x_3 &= 0 \\
&\Downarrow \\
6x_1 - 2x_2 + 14x_3 &= 0 \\
6x_1 - 3x_2 + 12x_3 &= 0 \\
6x_1 - 6x_2 + 6x_3 &= 0 \\
&\Downarrow \\
6x_1 - 2x_2 + 14x_3 &= 0 \\
-1x_2 - 2x_3 &= 0 \\
-4x_2 - 8x_3 &= 0 \\
&\Downarrow \\
x_1 &= -3x_3 \\
x_2 &= -2x_3 \\
x_3 &= \text{beliebiges } a \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich der Kern:

$$Kern(\phi) = \{-3aA_1 + (-2a)A_2 + aA_3 | a \in \mathbb{R}\}$$

Da wir aus dem GLS sehen, daß wir 2 unabhängige Gleichungen haben, ergibt $Rang(M(\phi)) = 2$.

Alle Vektoren die auf $0B_1 + \frac{1}{2}B_2 + B_3$ abgebildet werden, erfüllen also die Gleichung:

$$M(\phi) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich mit der Gleichung (1) das GLS:

$$\begin{aligned}
3x_1 - 1x_2 + 7x_3 &= 0 \\
2x_1 - 1x_2 + 4x_3 &= \frac{1}{2} \\
1x_1 - 1x_2 + 1x_3 &= 1 \\
&\Downarrow \\
6x_1 - 2x_2 + 14x_3 &= 0 \\
6x_1 - 3x_2 + 12x_3 &= \frac{3}{2} \\
6x_1 - 6x_2 + 6x_3 &= 6 \\
&\Downarrow \\
6x_1 - 2x_2 + 14x_3 &= 0 \\
-1x_2 - 2x_3 &= \frac{3}{2} \\
-4x_2 - 8x_3 &= 6 \\
&\Downarrow \\
x_1 &= -\frac{1}{2} - 3x_3 \\
x_2 &= -\frac{3}{2} - 2x_3 \\
x_3 &= \text{beliebiges } a \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Alle Lösungen sind also von der Form: $(-\frac{1}{2} - 3a, -\frac{3}{2} - 2a, a)$.
Für $a = 0$ lautet die Lösung also:

$$(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0) \ .$$

Alle Lösungen sind also wie folgt beschrieben:

$$L = \lambda \cdot (-3, -2, 1) + (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0) \qquad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}$$