H136. Als erstes stelle ich die Matrix der Abbildung auf:

$$M(\sigma) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Nun ergibt sich das charakteristische Polynom $\mathcal{X}_\sigma$ aus der Formel

$$\mathcal{X}_\sigma = |xE - M(\sigma)|$$

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_\sigma &= \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & x-5 \end{vmatrix} \\ &= (x-2)^3 - (x-5) \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die beiden Eigenwerte $a_1 = 2$ und $a_2 = 5$. Der Eigenraum wird nun durch den Kern der Abbildung, die durch die Matrix oben mit eingesetztem Eigenwert beschrieben wird, bestimmt. Es ergibt sich für a_1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Daraus lässt sich leicht eine Basis des Eigenraumes V_{a_1} ablesen:

$$V_{a_1} = \ll (0,1,0,0), (0,0,3,-1) \gg$$

Für a_2 ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Man findet also als Basis von V_{a_2}:

$$V_{a_2} = \ll (0,0,0,1) \gg$$

H137. Zunächst stelle ich auch hier die $n \times n$-Matrix der Abbildung auf:

$$M(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nach der bekannten Formel (siehe **H136.**) ergibt sich für das charakteristische Polynom $\mathcal{X}_\tau = x^n$ und man sieht das Minimalpolynom $\mu_\tau = x$.

H138. Um die Determinante zu berechnen forme ich die Matrix mit elementaren Mitteln so um, dass ich eine Dreiecksmatrix erhalte:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

erst von jeder Zeile die vorige abziehen, von unten beginnend:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

nun die Spalten, genauso wie eben:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

schließlich zu der ersten Zeile die Hälfte jeder anderen dazuzählen:

$$\begin{vmatrix} \frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A) = \frac{9}{2}(-2)^9 = -2304$$

H139. Eine Vorgehensweise wie in **H138** hilft auch hier:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}$$

erst von jeder Spalte die vorige abziehen, angefangen mit der n-ten Spalte:

$$\begin{vmatrix} x & 1-x & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x-1 & 1-x & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1-x \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & x-1 \end{vmatrix}$$

jetzt die untere Zeile auf die vorige addieren, mit der n-ten beginnend:

$$\begin{vmatrix} x+(n-1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n-1 & x-1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 2 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A) = (x+(n-1))(x-1)^{n-1}$$
$$= (x-1)^{n-1}(x+n-1) \qquad \square$$