H124. Nach der Cramerschen Regel ergibt sich:

$$\begin{aligned} M &:= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \det(M) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 6 + 1 + 3 = 9 \\ x_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\det(M)} = \frac{0}{9} = 0 \\ x_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\det(M)} = \frac{0}{9} = 0 \\ x_3 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\det(M)} = \frac{0}{9} = 0 \end{aligned}$$

Man sieht also, dass dieses Gleichungssystem vollen Rang hat und somit für das homogene GLS nur der Nullvektor als Lösung existiert. (Was natürlich schon klar war, da $\det(M) \neq 0$.)

H125. Wir wissen, dass das Minimalpolynom einer 2×2-Matrix einen Grad ≤ 2 hat, da A offensichtlich kein Vielfaches der Standardbasis E ist, muss das Minimalpolynom μ_A vom Grad 2 sein. Damit wissen wir, dass das Minimalpolynom die Gleichung

$$0 = \alpha A^2 + \beta A + \gamma E$$

erfüllen muss. Man findet also:

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ A^1 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ A^0 &= E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

man sieht schnell die folgende Gleichung:

$$0 = A^2 - 3A + 2E = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es ergibt sich:

$$\mu_A = x^2 - 3x + 2$$

H126. Ich bringe die Matrix auf Dreiecksform:

1	0	0	3	
2	7	0	6	-2Z1
0	6	3	0	
7	3	1	-5	-7Z1
1	0	0	3	
0	7	0	0	
0	6	3	0	-(6/7)Z2
0	3	1	-26	-(3/7)Z2
1	0	0	3	
0	7	0	0	
0	0	3	0	
0	0	1	-26	-(1/3)Z3
1	0	0	3	
0	7	0	0	
0	0	3	0	
0	0	0	-26	

Die Determinante ergibt sich jetzt einfach aus dem Produkt der Diagonalen, da ich keine Spalten/Zeilen vertauscht und keine einfachen Multiplikationen von Spalten/Zeilen vorgenommen habe:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 \cdot 3 \cdot -26 = -546$$

H127. Die Matrix $M(\sigma)$ lässt sich leicht aufstellen, da die Spalten der Matrix die Bilder der Basisvektoren darstellen:

$$M(\sigma) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 3 \\ -1 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

Ebenso ergibt sich die Matrix des Basiswechsels M:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir benötigen noch M^{-1}, um die Formel:

$$M_B(\sigma) = M^{-1} M(\sigma) M$$

anwenden zu können.

1	1	0	1	0	0	
0	1	1	0	1	0	-Z3
0	0	1	0	0	1	
1	1	0	1	0	0	-Z2
0	1	0	0	1	-1	
0	0	1	0	0	1	
1	0	0	1	-1	1	
0	1	0	0	1	-1	
0	0	1	0	0	1	

Da wir nun M^{-1} haben, können wir nach der Formel von oben $M_B(\sigma)$ berechnen:

$$\begin{aligned} M_B(\sigma) &= M^{-1}M(\sigma)M \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 3 \\ -1 & 8 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 & 12 \\ 4 & 13 & 12 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 9 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Determinanten sollten hoffentlich den gleichen Wert ergeben, da sich diese nicht ändert, wenn ein Basiswechsel vorgenommen wird. Es ergibt sich nach Sarrus:

$$\begin{aligned} |M(\sigma)| &= -90 - 15 + 224 + 63 - 48 + 100 = 234 \\ |M_B(\sigma)| &= -54 - 9 + 105 + 18 + 189 - 15 = 234 \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist wie erwartet.

H128. Am einfachsten kann man die Nullstellen mit dem Horner-Schema überprüfen, nachdem man geraten hat. Da die ganzzahligen Nullstellen dieses Polynoms Teiler von 4 sein müssen, beschränkt sich der Bereich in dem gesucht werden muss auf:$\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$.

	1	4	3	-4	-4
		1	5	8	4
1	1	5	8	4	0
		-1	-4	-4	
-1	1	4	4	0	
		-2	-4		
-2	1	2	0		
		-2			
-2	1	0			

Da ein Polynom vom Grad 4 höchstens 4 Nullstellen hat, haben wir Glück gehabt und vier ganzzahlige Nullstellen des Polynoms gefunden, wobei an der Stelle -2 eine doppelte Nullstelle vorhanden ist:$x_{1,2} = -2; x_3 = -1; x_4 = 1$. Das Polynom sieht in Linearfaktoren zerlegt wie folgt aus:

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4 = (x+2)^2(x+1)(x-1)$$