H111. Um zu prüfen, ob diese Matrix invertierbar ist, bringe ich sie auf eine Dreiecksform:

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Z2 - \lambda Z1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Z3 - \frac{\lambda}{1-\lambda^2} Z2;\ \text{danach } Z4 - \lambda Z3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} & -\frac{\lambda}{1-\lambda^2} & 1 & 0 \\ -\frac{\lambda^3}{1-\lambda^2} & \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} & -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Man sieht also, dass diese Matrix regulär (und somit invertierbar) ist, wenn gilt: $1 - \lambda^2 \neq 0$. Es folgt: A_λ ist regulär für $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.
Für die invertierte Matrix fehlen nur zwei Schritte:

$$Z1 - \frac{\lambda}{1-\lambda^2} Z2; Z2/(1-\lambda^2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\lambda^2} & -\frac{\lambda}{1-\lambda^2} & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda}{1-\lambda^2} & \frac{1}{1-\lambda^2} & 0 & 0 \\ \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} & -\frac{\lambda}{1-\lambda^2} & 1 & 0 \\ -\frac{\lambda^3}{1-\lambda^2} & \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} & -\lambda & 1 \end{pmatrix} = A_\lambda^{-1}$$

H112. Da A nicht regulär ist, können wir annehmen, dass die j-te Zeile ein Vielfaches der i-ten ist.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \lambda a_{i1} & \dots & \lambda a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ b_{j1} & \dots & b_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Wir bilden nun die Produktmatrix $A \cdot B$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \lambda a_{i1} & \dots & \lambda a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ b_{j1} & \dots & b_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kn} \\ \sum_{k=1}^n \lambda a_{ik}b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^n \lambda a_{ik}b_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{nk}b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{nk}b_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kn} \\ \lambda \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{k1} & \dots & \lambda \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{nk}b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{nk}b_{kn} \end{pmatrix}$$

Man erkennt sofort, dass die $j-$te Zeile der Produktmatrix ein Vielfaches der $i-$ten ist. Deshalb ist die Matrix nicht regulär und auch nicht invertierbar. □

H113. Die Vektoren B_1, B_2, B_3 bilden eine Basis von V, wenn sie linear unabhängig sind. Also stelle ich die zugehörige Matrix auf und prüfe ob die Determinante 0 ist.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 2 = -1 \neq 0$$

Somit hat die Matrix vollen Rang und die Vektoren B_1, B_2, B_3 bilden eine Basis von V. Da sich die Matrix A'_ϕ aus einer Rechtsmultiplikation mit der Überführungsmatrix von A nach B ergibt, stelle ich nun die Überführungsmatrix M auf:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} A'_\phi &= A_\phi M \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 10 & 22 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

H114. Hier die Determinante, wobei gleichzeitig berechnet werden kann, für welche Werte von a die Matrix regulär ist:

$$\begin{aligned} \det(B) = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ 1 & a & -a \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} &= -a^2 + 0 + a^3 - 0 + a^2 + a^3 \\ &= a^3 + a^2 \end{aligned}$$

Wenn die Matrix regulär sein soll, muss gelten:

$$a^3 + a^2 \neq 0 \Rightarrow a^2(a+1) \neq 0$$

Die Matrix ist also regulär für alle $a \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}$. Dann berechnet sich die Inverse wie folgt:

$$B = \begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 \\ 1 & a & -a \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Z1/a; Z2/a$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Z1 - aZ3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2+a \\ \frac{1}{a} & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & -a \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Z2 - \frac{1}{a}Z1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2+a \\ 0 & 1 & -2-a \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & -a \\ -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Z3 - Z2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2+a \\ 0 & 1 & -2-a \\ 0 & 0 & 1+a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & -a \\ -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{a^2} & -\frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z3/(1+a)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2+a \\ 0 & 1 & -2-a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & -a \\ -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{a^3+a^2} & -\frac{1}{a+a^2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z1 - (a^2+a)Z3; Z2 + (2+a)Z3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -a \\ \frac{1}{a^3+a^2} & -\frac{1}{a+a^2} & 1 \\ \frac{1}{a^3+a^2} & -\frac{1}{a+a^2} & 0 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Also ist die Inverse von B:

$$B^{-1} = \frac{1}{a^3+a^2} \begin{pmatrix} 0 & a^2+a^3 & -a(a^2+a^3) \\ 1 & -a & a^2+a^3 \\ 1 & -a & 0 \end{pmatrix}$$