**H101.** Da wir uns auf die Standardbasis beziehen, und die Spaltenvektoren das Bild der Basisvektoren darstellen, ist die Abbildungsmatrix leicht gefunden:

$$\begin{aligned} M(\sigma) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ M(\tau) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Abbildungsmatrix der Hintereinanderausführung von $\sigma$ und $\tau$ ist das Produkt der beiden Matrizen $M(\sigma)$ und $M(\tau)$.

$$\begin{aligned} M(\tau\sigma) &= M(\tau) \cdot M(\sigma) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**H102.** Die Ableitungen eines Polynoms vom Grade $\leq 2$ lauten wie folgt:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ p'(x) &= 2a_2x + a_1 \\ p''(x) &= 2a_2 \\ p'''(x) &= 0 \end{aligned}$$

Die Abbildung $\delta^2$ bildet also $a_0 + a_1x + a_2x^2$ auf $2a_2 + 0x + 0x^2$ ab. Also: $\delta^2(a_0, a_1, a_2) = (2a_2, 0, 0)$ Es ergibt sich folgende Matrix:

$$M(\delta^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir machen eine Probe:

$$\begin{aligned} \delta^2(a_0, a_1, a_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2a_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Matrix zu $\delta^3$ ist noch einfacher zu finden, da jeder Vektor auf den Nullvektor abgebildet wird. Die Matrix:

$$M(\delta^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Probe ist wohl nicht nötig.

**H103.** Diese Tatsache ist ziemlich offensichtlich, ich versuche also sie durch Widerspruch zu beweisen.

$\Rightarrow$

Sei $A$ eine reguläre Matrix von der Form:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Dann soll es eine Matrix $A$ geben mit $ad - bc = 0$. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} ad - bc &= 0 \\ ad &= bc \end{aligned}$$

Es ergeben sich mehrere Fälle, in denen diese Gleichung erfüllt ist:

1. Auf beiden Seiten ist je ein Wert (oder auch beide) $= 0$, die sich ergebenden Matrizen haben jeweils entweder nur Nullen in einer Spalte oder einer Zeile (oder noch mehr Nullen), sie sind also nicht regulär! Dies ist ein Widerspruch zu $A$ ist reguläre Matrix.

2. Das Verhältnis $a/c$ ist gleich dem Verhältnis $b/d$. Dann ist die Spalte $(b, d)$ ein Vielfaches von der Spalte $(a, c)$, was wieder ein Widerspruch zu $A$ ist reguläre Matrix darstellt.

3. Das Verhältnis $a/b$ ist gleich dem Verhältnis $c/d$. Dann ist eine Zeile das Vielfache der anderen, und wieder haben wir den Widerspruch zur Voraussetzung das $A$ regulär ist!

Alle Möglichkeiten führen also zu dem Widerspruch, dass $A$ nicht regulär ist.

$\Leftarrow$

Die andere Richtung ergibt $ad - bc \neq 0 \Rightarrow$ es gibt eine Matrix $A$, die nicht regulär ist. Wie man aber leicht einsieht, ist dies nichts anderes, als bisher schon widerlegt wurde, denn um die Bedingung zu erfüllen, müsste eine der Bedingungen aus 1., 2. oder 3. auftreten, dann aber ist $ad - bc = 0$! Und somit haben wir einen Widerspruch zu der Voraussetzung.

Daraus ergibt sich die Richtigkeit der ursprünglichen Aussage. $\square$

**H104.** Aus **H103.** wissen wir, dass $A$ regulär ist, wenn gilt: $ad - bc \neq 0$. Also:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \\ ad - bc &= 7 - 6 = 1 \neq 0 \end{aligned}$$

A ist also regulär und somit existiert $A^{-1}$. Wir bestimmen darum nun $A^{-1}$:

$$\begin{aligned} \Delta &= ad - bc = 1 \\ A^{-1} &= \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**H105.** Um die Invertierbarkeit der Matrizen $A$ und $B$ herauszufinden, berechne ich zunächst die Determinanten, dabei verwende ich die Regel von Sarrus:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ \det(A) &= 6 + 6 + 10 - 30 + 2 + 6 = 22 - 22 = 0 \end{aligned}$$

$A$ ist also nicht invertierbar.

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\ \det(B) &= 2 + 0 + 15 - 10 - 0 - 15 = 17 - 35 = -8 \end{aligned}$$

B ist also invertierbar und ich bestimme $B^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Z3 - 5Z1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4Z3 + 3Z2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -15 & 4 & 3 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{8}Z2, -\frac{1}{4}Z3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$Z1 - Z2 - Z3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Um zu prüfen, ob die Matrix $AB$ invertierbar ist, berechne ich erstmal $AB$ und bestimme dann die Determinante $\det(AB)$:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -14 & -10 & 4 \\ 6 & 2 & -4 \\ -10 & -14 & -4 \end{pmatrix} \\ \det(AB) &= 112 + (-400) + (-336) - (-80) - (-784) - 240 = 0 \end{aligned}$$

Da also $\det(AB) = 0$ gilt, ist die Matrix nicht regulär, und somit auch nicht invertierbar, wie erwartet werden konnte.