Aufgabe 55.

1)

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x\ dx &= \int \sin x \sin x\ dx \\
u' = \sin x;\ u = -\cos x \qquad & v = \sin x;\ v' = \cos x \\
&= -\cos x\ \sin x + \int \cos^2 x\ dx \qquad \text{mit } \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \text{ folgt:} \\
&= -\cos x\ \sin x + x - \int \sin^2 x\ dx \\
\Rightarrow \qquad \int \sin^2 x\ dx &= -\frac{1}{2}(\cos x\ \sin x - x) + C
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\int x \sin x\ \cos x\ dx \quad \text{mit} \quad & v = x \sin x \qquad v' = \sin x + x \cos x \\
\text{und} \quad & u = \sin x \qquad u' = \cos x \text{ ergibt sich:} \\
\int x \sin x\ \cos x\ dx &= x \sin^2 x - \int (\sin x + x \cos x) \sin x\ dx \\
&= x \sin^2 x - \int \sin^2 x\ dx - \int x \sin x\ \cos x\ dx \qquad \text{mit 1) folgt:} \\
\int x \sin x\ \cos x\ dx &= \frac{1}{2}(x \sin^2 x + \frac{1}{2}(\cos x\ \sin x - x)) + C
\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
\int x^3 \cos x\ dx \quad \text{mit} \quad & v = x^3 \qquad v' = 3x^2 \\
\text{und} \quad & u = \sin x \qquad u' = \cos x \text{ ergibt sich:} \\
\int x^3 \cos x\ dx &= x^3 \sin x - 3 \int x^2 \sin x\ dx \\
\text{diesmal } v = x^2 \quad \Rightarrow \quad & x^3 \sin x + 3(x^2 \cos x - 2 \int x \cos x\ dx) \\
\text{und jetzt nochmal } v = x \quad \text{ergibt:} \quad & x^3 \sin x + 3(x^2 \cos x - 2(x \sin x - \int \sin x\ dx)) \\
\text{also} \quad & \\
\int x^3 \cos x\ dx &= x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x + C
\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2-1}\,dx \quad &\text{mit} \quad v = \sqrt{x^2-1} \qquad v' = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \\
&\text{und} \quad u = x \qquad u' = 1 \text{ ergibt sich:} \\
\int \sqrt{x^2-1}\,dx \quad &= \quad x\sqrt{x^2-1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx \\
&= \quad x\sqrt{x^2-1} - \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx - \int \sqrt{x^2-1}\,dx \\
\text{mit} \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx \quad &= \quad \ln|x+\sqrt{x^2-1}| \text{ (aus Formeln und Hilfen, Merziger)} \\
\Rightarrow \int \sqrt{x^2-1}\,dx \quad &= \quad \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right)
\end{aligned}$$

Wegen $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| = \operatorname{arcosh} x$ mit $x \geq 1$ (ebenfalls aus Formeln und Hilfen, Merziger) kann man das Ergebnis auch wie folgt schreiben:

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx \quad = \quad \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - \operatorname{arcosh} x\right) \qquad \text{mit } x \geq 1$$

Aufgabe 56. Die Fläche fl unter der Geraden ergibt aus x und y, also:

$$fl = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}.$$

Da die gesuchte schraffierte Fläche oberhalb der X-Achse liegt, wird für die gesuchte Fläche F auch nur der postive Teil der Funktion $\pm\sqrt{x^2-1}$ benötigt. Es ergibt sich der Definitionsbereich $x \in [1, +\infty)$ und als Wertebereich $y \in [0, +\infty)$. Die Fläche unter dem Graphen zu $\sqrt{x^2-1}$ ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
Fl \quad &= \quad \int_1^x \sqrt{t^2-1}\,dt \qquad \text{nach Aufgabe 55. 4) ergibt sich:} \\
&= \quad \left[\frac{1}{2}\left(t\sqrt{t^2-1} - \operatorname{arcosh} t\right)\right]_1^x \\
&= \quad \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\operatorname{arcosh} x - \frac{1}{2}\sqrt{0} + \frac{1}{2}\operatorname{arcosh} 1 \\
&= \quad \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\operatorname{arcosh} x - 0 - 0
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für die gesuchte Fläche F in Abhängigkeit von x:

$$\begin{aligned}
F(x) \quad &= \quad \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \left(\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\operatorname{arcosh} x\right) \\
&= \quad \frac{1}{2}\operatorname{arcosh} x
\end{aligned}$$

Damit haben wir die schraffierte Fläche als Funktion von x bestimmt zu

$$F(x) := \frac{1}{2}\operatorname{arcosh} x$$

Die Umkehrfunktion, also x als Funktion von F, errechnet sich nun leicht:

$$\begin{aligned} & y &=& F(x) \\ & y &=& \frac{1}{2}\operatorname{arcosh} x \\ \Rightarrow \quad & 2y &=& \operatorname{arcosh} x \\ \Rightarrow \quad & x &=& \cosh(2y) \end{aligned}$$

Somit ist x in Abhängigkeit von F bestimmt zu

$$x(F) := \cosh(2F)$$

Dabei ergeben sich Definitions- und Wertebereich umgekehrt wie die von $F(x)$.