Aufgabe 49.

a) Um die Wendepunkte von $f(x)$ zu bestimmen, brauche ich die Extremwerte der ersten Ableitung $f'(x)$ und deshalb die Nullstellen der zweiten Ableitung $f''(x)$, da an einem Wendepunkt die Steigung maximal (bzw. minimal) ist. Also bestimme ich zunächst die ersten beiden Ableitungen.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2 \\ f'(x) &= 15x^4 - 20x^3 + 3 \\ f''(x) &= 60x^3 - 60x^2 \end{aligned}$$

Nun bestimme ich die Nullstellen von $f''(x)$:

$$\begin{aligned} 0 &= 60x^3 - 60x^2 \\ &= 60x^2(x-1) \end{aligned}$$

Man sieht sofort, dass $x = 0$ eine doppelte Nullstelle von $f''(x)$ ist und $x = 1$ eine einfache. Um nun festzustellen, ob $f'(x)$ an den genannten Stellen Extrema hat, gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Man prüft, ob es einen Vorzeichenwechsel von $f''(x)$ an der Nullstelle gibt, wechselt es von $-$ nach $+$, so liegt ein Minimum vor, andersherum ein Maximum.
2. Man leitet die Funktion weiter ab, bis an der Nullstelle x_0 der Funktionswert der n-ten Ableitung nicht Null ist. Es gilt dann:
   - n ist gerade: $f^{(n)}(x_0) > 0$ (< 0) $\Rightarrow$ Es liegt ein lokales Minimum (Maximum) vor.
   - n ist ungerade: Es liegt kein Extremum vor.

In diesem Fall ist der Aufwand in etwa gleich hoch, da die Funktion sehr einfach abzuleiten ist. Jedoch muss darauf geachtet werden, dass es um die Extrema der Ersten Ableitung geht.

$$\begin{aligned} f'''(x) &= 180x^2 - 120x \\ f'''(0) &= 0 \text{ ; also weiter Ableiten} \\ f'''(1) &= 60 > 0 \end{aligned}$$

Da $f'''(x)$ die Zweite Ableitung von $f'(x)$ ist, haben wir ein gerades n, und somit liegt an der Stelle $x = 1$ ein lokales Minimum von $f'(x)$ und $f(x)$ hat an dieser Stelle einen Wendepunkt.

$$\begin{aligned} f''''(x) &= 360x - 120 \\ f''''(0) &= -120 \end{aligned}$$

Diese Ableitung ist ungerade, deshalb liegt an dieser Stelle kein Extremum von $f'(x)$ und $f(x)$ hat hier auch keinen Wendepunkt. Es gibt also nur einen Wendepunkt an der Stelle $x = 1$.

Für die Konvexität gibt es ebenfalls eine einfache Ableitungsregel, sie bezieht sich auf die Zweite Ableitung:

- $f(x)$ ist konkav in (a, b), wenn gilt

$$f''(x) \leq 0 \text{ ; für alle } x \in (a, b)$$

- $f(x)$ ist konvex in (a, b), wenn gilt

$$f''(x) \geq 0 \text{ ; für alle } x \in (a, b)$$

Es ergibt sich folgende Tabelle:

	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \infty$
$f''(x)$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	konkav		konvex

Also ist $f(x)$ für $x \in (-\infty, 1)$ konkav und konvex für $x \in (1, \infty)$.

b) Es gelten dieselben Bedingungen wie bei **a)**, also erst mal ableiten:

$$\begin{aligned} f(x) &= x2^{-x^2} \\ f'(x) &= 2^{-x^2} - 2x^2 2^{-x^2} \ln 2 \\ f''(x) &= -6 \cdot 2^{-x^2} x \ln 2 + 4x^3 2^{-x^2} (\ln 2)^2 \end{aligned}$$

Man sieht sofort:

$$\begin{aligned} & & f''(x) &= 0 \\ & & &\Downarrow \\ & & 0 &= -6 \cdot 2^{-x^2} x \ln 2 + 4x^3 2^{-x^2} (\ln 2)^2 \\ & & &\Downarrow \\ x = 0 \quad & \text{oder} & 0 &= -6 \cdot 2^{-x^2} \ln 2 + 4x^2 2^{-x^2} (\ln 2)^2 \\ & & &= \frac{4x^2 (\ln 2)^2 - 6 \ln 2}{2^{x^2}} \\ & & &\Downarrow \\ & & &= x^2 - \frac{6}{4 \ln 2} \\ & & &\Downarrow \\ & & x_{1,2} &= \pm\sqrt{\frac{3}{2 \ln 2}} \end{aligned}$$

Es ergibt sich folgende Tabelle:

	$-\infty < x < -\sqrt{\frac{3}{2\ln 2}}$	$\sqrt{\frac{3}{2\ln 2}} < x < 0$	$0 < x < \sqrt{\frac{3}{2\ln 2}}$	$\sqrt{\frac{3}{2\ln 2}} < x < \infty$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	konkav	konvex	konkav	konvex

Aufgabe 50.

a)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(1-\cos x)}{\ln(\sin x)} &\overset{[\frac{-\infty}{-\infty}]}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\sin^2 x}{(1-\cos x)\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{(1-\cos x)\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{1+\cos x}{\cos x} \\
&= \frac{1+1}{1} = 2
\end{aligned}$$

Der Grenzwert ist vom Typ $[-\infty/-\infty]$ und beträgt 2.

b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\ln(x+1)}\right) &\overset{[\infty-\infty]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)-\sin x}{\ln(x+1)\sin x} \\
\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)-\sin x}{\ln(x+1)\sin x} &\overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1}-\cos x}{\ln(x+1)\cos x + \frac{\sin x}{x+1}} \\
\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1}-\cos x}{\ln(x+1)\cos x + \frac{\sin x}{x+1}} &\overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{(x+1)^2}+\sin x}{\ln(x+1)(-\sin x) + 2\frac{\cos x}{x+1} - \frac{\sin x}{(x+1)^2}} \\
&= \frac{-1+0}{0+2\cdot 1-0} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Der Grenzwert hat den Typ $[\infty-\infty]$ und beträgt $-1/2$.

d)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} \frac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x^x}} &\overset{[]}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\sqrt{x}\ln x}}{e^{\frac{x}{2}\ln x}} \\
\lim_{x\to 0+} \frac{e^{\sqrt{x}\ln x}}{e^{\frac{x}{2}\ln x}} &= \lim_{x\to 0+} e^{(\sqrt{x}-\frac{x}{2})\ln x}
\end{aligned}$$