Aufgabe 43.

a)

$$\begin{aligned}(\sqrt{2+x}\sqrt{4-x^2})' &= (\sqrt{2+x}\sqrt{2+x}\sqrt{2-x})' \\ &= ((2+x)\sqrt{2-x})'\end{aligned}$$

Mit der Produktregel ergibt sich:

$$\begin{aligned}((2+x)\sqrt{2-x})' &= \sqrt{2-x} + (2+x)\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2-x}}(-1) \\ &= \sqrt{2-x} - \frac{(2+x)}{2\sqrt{2-x}} \\ &= \frac{2(2-x)-(2+x)}{2\sqrt{2-x}} \\ &= \frac{2-3x}{2\sqrt{2-x}}\end{aligned}$$

Wir haben also:

$$(\sqrt{2+x}\sqrt{4-x})' = \frac{2-3x}{2\sqrt{2-x}}\ .$$

b) Bei dieser Aufgabe muss die Kettenregel mehrfach verwendet werden:

$$\begin{aligned}\left(\tan(\sqrt[8]{1+\sin^8 x})\right)' &= \frac{1}{\cos^2(\sqrt[8]{1+\sin^8 x})} \cdot \left(\sqrt[8]{1+\sin^8 x}\right)' \\ \left(\sqrt[8]{1+\sin^8 x}\right)' &= \left((1+\sin^8 x)^{\frac{1}{8}}\right)' \\ &= \frac{1}{8}(1+\sin^8 x)^{-\frac{7}{8}} \cdot (1+\sin^8 x)' \\ (1+\sin^8 x)' &= 8\sin^7 x \cos x\end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich:

$$\begin{aligned}\left(\tan(\sqrt[8]{1+\sin^8 x})\right)' &= \frac{1}{\cos^2(\sqrt[8]{1+\sin^8 x})} \cdot \frac{1}{8}(1+\sin^8 x)^{-\frac{7}{8}} \cdot 8\sin^7 x \cos x \\ &= \frac{\sin^7 x \cos x}{\cos^2(\sqrt[8]{1+\sin^8 x})\sqrt[8]{(1+\sin^8 x)^7}}\end{aligned}$$

c) Hier muss sowohl die Ketten-, als auch die Quotientenregel angewendet werden:

$$\begin{aligned}\left(\sinh\left(\pi^x + \frac{\cos x - 1}{2\cos x - 1}\right)\right)' &= \cosh\left(\pi^x \frac{\cos x - 1}{2\cos x - 1}\right)\left(\pi^x \ln \pi + \frac{-\sin x(2\cos x - 1) - \cos x(-2\sin x)}{(2\cos x - 1)^2}\right) \\ &= \cosh\left(\pi^x \frac{\cos x - 1}{2\cos x - 1}\right)\left(\pi^x \ln \pi + \frac{\sin x}{(2\cos x - 1)^2}\right)\end{aligned}$$

d) Hierbei müssen nun Ketten-, Produkt- und Quotientenregel angewendet werden:

$$\begin{aligned}
\left(x^{\frac{x-1}{2x-1}}\right)' &= \left(e^{\frac{x-1}{2x-1}\ln x}\right)' \\
&= e^{\frac{x-1}{2x-1}\ln x} \cdot \left(\frac{x-1}{2x-1}\ln x\right)' \\
\left(\frac{x-1}{2x-1}\ln x\right)' &= \frac{(\ln x + \frac{x-1}{x}(2x-1) - 2(x-1)\ln x}{(2x-1)^2} \\
&= \frac{2x\ln x - \ln x + \frac{2x(x-1)}{x} - \frac{x-1}{x} - 2x\ln x + 2\ln x}{(2x-1)^2} \\
&= \frac{(x-1)(2x-1) + x\ln x}{x(2x-1)^2}
\end{aligned}$$

Es ergibt sich insgesamt:

$$\begin{aligned}
\left(x^{\frac{x-1}{2x-1}}\right)' &= e^{\frac{x-1}{2x-1}\ln x}\frac{(x-1)(2x-1)+x\ln x}{x(2x-1)^2} \\
&= x^{\frac{x-1}{2x-1}}\frac{(x-1)(2x-1)+x\ln x}{x(2x-1)^2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 44.

a) Wir kennen folgende Darstellung des MWS:

$$f'(\xi) = \frac{f(x)-f(y)}{(x-y)} \qquad \text{mit } y \le \xi \le x$$

Es gilt dann also mit $f(x) = x^n$ und den gegebenen Vorrausetzungen:

$$f'(y) \le f'(\xi) \le f'(x)$$

Wir kennen aber auch die Ableitung $f'(x)$, sie lautet $f'(x) = nx^{n-1}$. Also gilt:

$$ny^{n-1} \le \frac{x^n - y^n}{x-y} \le nx^{n-1}$$

Da nach Vorrausetzung $(x-y)$ positiv ist, folgt:

$$ny^{n-1}(x-y) \le x^n - y^n \le nx^{n-1}(x-y) \qquad \square$$

b) Wir haben also die Abschätzung:

$$|\sin x - \sin y| \le |x-y|$$

Ausgehend von $x \neq y$ erhalte ich:

$$\frac{|\sin x - \sin y|}{|x-y|} \le 1$$

Es folgt nach dem MWS:

$$|\cos\xi| \le 1 \qquad \text{mit } \xi \in (x,y)$$

Diese Abschätzung ist sicherlich immer wahr, denn die *cos*-Funktion nimmt nur Werte zwischen -1 und 1 an. $\square$

c) Folgende Ungleichung ist gegeben:

$$\begin{aligned} |\sin x - 1| &\leq |x - \frac{\pi}{2}|^2 \\ \Updownarrow & \\ |\sin x - 1| &\leq |x - \frac{\pi}{2}| \cdot |x - \frac{\pi}{2}| \end{aligned}$$

mit $x \neq \frac{\pi}{2}$ und $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ folgt:

$$\frac{|\sin x - \sin \frac{\pi}{2}|}{|x - \frac{\pi}{2}|} \leq |x - \frac{\pi}{2}|$$

Daraus folgt nach dem MWS:

$$|\cos \xi| \leq |x - \frac{\pi}{2}| \qquad \text{mit } \xi \in (x, \frac{\pi}{2})$$

Wegen $x \in \mathbb{R}$ und $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ nehme ich statt ξ wieder ein x (das zwischen ξ und $\frac{\pi}{2}$ liegt) und erhalte:

$$\begin{aligned} |\cos x| &\leq |\cos \frac{\pi}{2}| + |x - \frac{\pi}{2}| \\ \Updownarrow & \\ |\cos x - \cos \frac{\pi}{2}| &\leq |x - \frac{\pi}{2}| \\ \Updownarrow & \\ \frac{|\cos x - \cos \frac{\pi}{2}|}{|x - \frac{\pi}{2}|} &\leq 1 \qquad \text{mit } x \neq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Nach dem erneuten Anwenden des MWS erhalte ich:

$$|-\sin \xi| \leq 1 \qquad \text{mit } \xi \in (x, \frac{\pi}{2})$$

Diese Ungleichung ist immer erfüllt! □